El Indicador de Riesgo Crediticio de Argentina dentro de un enfoque de teoría de carteras de la exigencia de capital por riesgo crediticio

Autor: **Guillermo Escudé**

DOCUMENTO DE TRABAJO NRO. 8

Julio 1999

Las opiniones vertidas en este trabajo son exclusivamente del autor y no reflejan necesariamente las del B.C.R.A. El autor agradece los comentarios de todos los participantes en el seminario interno del B.C.R.A. donde se discutió el primer borrador de este trabajo. También agradece los comentarios de Juan Pablo Nicolini a una primera versión presentada en las Cuartas Jornadas de Economía e Internacional de la Universidad de La Plata el 6 de mayo de 1999 y muy especialmente a María Elena Grubisic por su prolija revisión de la versión final.

1. Introducción y Resumen Ejecutivo

1.1 Las regulaciones prudenciales de riesgo crediticio en Argentina

Las regulaciones prudenciales argentinas sobre solvencia de las entidades financieras incluyen un requisito de capital por riesgo crediticio definido sobre el “banking book” de las entidades. Este requisito se aparta de las recomendaciones de Basilea en algunas direcciones. Según éstas, debe requerirse un mínimo de 8% de los activos ponderados por riesgo, definiéndose ponderaciones que pueden variar entre 0 y 100% según ciertas categorías amplias de activos y con cierta discrecionalidad para las autoridades de cada país.

En Argentina el requisito mínimo es de 11,5% y se definen ponderadores del tipo de Basilea. Pero aparte de esto se multiplica el 11,5% por un “factor CAMEL” que varía entre 0,97 y 1,125 según la calificación CAMEL dada al banco por la Superintendencia de Entidades Financieras, de manera tal que cuanto peor calificada está una entidad mayor es el factor. Adicionalmente, cada préstamo tiene un coeficiente (o ponderador) que multiplica al ponderador de riesgo correspondiente a la categoría del préstamo según la clasificación en el estilo de Basilea. Este ponderador es llamado Indicador de Riesgo Crediticio (IRC), ya que toma a la tasa de interés de cada préstamo como indicadora del riesgo del mismo.[1] Por consiguiente, en las normas argentinas el ponderador final del préstamo está compuesto por dos ponderadores que se multiplican, el primero es el de Basilea y se aplica sobre grandes categorías de préstamos (y otros activos) y el segundo es el IRC y depende del nivel de la tasa de interés activa.

Este trabajo encara el tema de la utilización de ponderadores de riesgo desde una perspectiva regulatoria que tiene en cuenta explícitamente el objetivo de acotar los riesgos de insolvencia de los bancos mediante requisitos de capital mínimos. Los ponderadores de riesgo de Basilea a menudo han sido criticados por no tomar en cuenta fenómenos de cartera como el beneficio derivado de la

[1] La tabla que define actualmente al Indicador de Riesgo parte de un factor de 0,8 para los préstamos a clientes que cuenten con calificación de riesgo no menor a la de los títulos públicos nacionales siempre que la tasa de interés no supere en más de dos puntos porcentuales a la de los préstamos a empresas de primera línea. Aparte de estos casos, el factor varía entre 1 y 6 según la magnitud de la tasa de interés, ya sea para préstamos en moneda extranjera (m.e.) o en pesos. Por ejemplo, los préstamos en m.e. con tasas hasta 14% anual o en pesos con tasas hasta 18% anual tienen actualmente un factor de 1, los préstamos en m.e. con tasas entre 14% y 17% o en pesos con tasas entre 18% y 21% tienen un factor de 1,2, etc. Al final de la tabla, los préstamos en m.e. con tasas mayores a 74% o en pesos con tasas mayores a 78% tienen un factor de 6.

diversificación y por no diferenciar entre préstamos otorgados a deudores con calificaciones disímiles (e.g. una empresa AAA vis a vis una B). La mayor parte de los préstamos en el enfoque de Basilea terminan teniendo ponderadores de riesgo unitarios excepto cuando tienen garantías muy significativas. No hay cabida allí para discriminar entre bancos más o menos prudentes en la asignación de sus recursos totales entre préstamos que importan diferentes niveles de riesgo. El reciente replanteo del Comité de Basilea sobre Supervisión Bancaria reconoce explícitamente que "la actual ponderación por riesgo de activos es, en el mejor de los casos, una medida cruda del riesgo económico, principalmente porque los grados de exposición al riesgo crediticio no están suficientemente calibrados como para diferenciar adecuadamente entre los riesgos crediticios de los prestatarios."[2]

Una forma de corregir algunas de estas deficiencias parte de recordar que la tasa de interés activa refleja entre otras cosas el riesgo del préstamo. Un banco cobrará una mayor tasa de interés a un cliente considerado más riesgoso, más allá de todos los otros costos que inciden en la determinación de la tasa de interés. Por consiguiente, *prima facie* la introducción de una relación entre la tasa de interés de un préstamo y el ponderador de riesgo sobre el préstamo que establece la normativa argentina tiene un gran atractivo. Por otro lado, como la tasa de interés activa refleja también diversos costos aparte del riesgo, cabe preguntarse cual es la mejor manera de diseñar los ponderadores a utilizar para determinar los requisitos de capital.

La finalidad del presente trabajo es analizar la fundamentación microeconómica de una norma de este tipo sin partir de preconceptos con respecto a cómo debe estructurarse en detalle. Por ello, se parte de un conjunto de ponderadores arbitrarios y se demuestra que para asegurar el objetivo regulatorio de limitar la probabilidad de quiebra de la entidad financiera los ponderadores deben respetar cierta lógica. Siguiendo a Rochet (1992), se demuestra que si los ponderadores no están bien estructurados, el incentivo dado a la entidad puede ser contrario al buscado: o sea, la entidad puede verse incentivada a asignar más préstamos muy riesgosos, aprovechando las inconsistencias en la estructura de ponderaciones, y menos préstamos poco riesgosos. De esta manera, la restricción regulatoria podría fácilmente hacer aumentar la probabilidad de quiebra de un banco en lugar de disminuirla.

[2] Basel Committee on Banking Supervision (1999.)

1.2 La modelización del comportamiento de un banco mediante teoría de carteras

Se parte de un marco muy general basado en la teoría de carteras que se desarrolló a partir de Markowitz, Tobin, Sharpe, Lintner, Merton, y otros clásicos de la teoría de finanzas. Se supone que las condiciones en la industria bancaria son fuertemente competitivas, lo que elimina todo poder de mercado y hace que las tasas de interés reflejen exclusivamente los costos esperados y los riesgos. Se cree que este es un supuesto básico razonable para la Argentina actual.

Además, se supone que cada banco se comporta como un administrador de cartera que toma sus decisiones de asignación de recursos de acuerdo con sus preferencias sobre el rendimiento esperado y el riesgo. Estas preferencias se resumen en un coeficiente de aversión al riesgo.

En la mayor parte del trabajo se supone, para simplificar, que el banco es de responsabilidad ilimitada, lo cual significa que no toma en cuenta, al tomar su decisión de cartera, que no puede perder más que su capital (y algunos costos de quiebra que pueden omitirse). Esto permite obtener resultados claros sin las complicaciones que introduce la responsabilidad limitada. Sin embargo, en una última sección se analizan algunas de las consecuencias de la responsabilidad limitada (nuevamente, siguiendo a Rochet (1992)).

Cuando hay responsabilidad ilimitada, puede tomarse como constante el coeficiente de aversión al riesgo del banco (aunque no es necesario hacerlo), lo cual facilita algunos aspectos del análisis. Cuando hay responsabilidad limitada, sin embargo, la aversión al riesgo es necesariamente variable en función de la capitalización del banco. Cuando el capital del banco es muy reducido, el banco enfrenta en esencia una “one way bet”, por lo cual puede convertirse en amante del riesgo y asumir posiciones muy riesgosas aún cuando los ponderadores de riesgo sean definidos en la forma óptima (para bancos de responsabilidad limitada) que se reseña a continuación.

Para enfrentar la responsabilidad limitada, se sugiere la necesidad de complementar los requisitos de capital mínimo definidos a través de activos ponderados por riesgo con requisitos de capital mínimo absoluto.[3] De esta manera se obliga a los bancos (administradores o accionistas) a tener

[3] Ver Rochet (1992).

suficiente capital para perder como para disminuir su propensión a ser amantes del riesgo debido a su responsabilidad limitada.

El riesgo crediticio se expresa en el trabajo a través de las características probabilísticas del costo por incumplimiento en el servicio de los préstamos, o costo por incobrabilidad. Este costo refleja el resultado neto de la pérdida de ingresos por incumplimiento menos el recupero que pueda haber. Se supone que el costo por incumplimiento por unidad de préstamo se distribuye normalmente, lo cual permite resumir en dos parámetros las características de toda la cartera de préstamos. Estos dos parámetros son el costo esperado y el desvío estándar del costo (o sea, la dispersión del costo en torno a su media). Esta distinción es muy importante pues el costo medio puede tratarse como los demás costos del banco mientras que el desvío estándar del mismo tiene que ver específicamente con el riesgo.

El rendimiento del préstamo es la tasa de interés activa menos el costo por incumplimiento y menos otros costos que puedan ser imputados directamente al préstamo. Se opta por usar como variable fundamental el capital final del banco, o sea, el que le queda al final del período luego de que cobra las tasas activas de los préstamos en cumplimiento, se restan los costos por incumplimiento (que son aleatorios) así como los restantes costos y devuelve los depósitos con sus intereses a los depositantes. Si este capital final resulta negativo el banco estará quebrado.

Se supone además que el banco tiene la opción de colocar parte de sus fondos en un activo libre de riesgo (que puede interpretarse como el mercado interbancario) o bien de endeudarse en el activo libre de riesgo. En teoría de finanzas este supuesto permite obtener una forma convenientemente lineal para la frontera de eficiencia en el espacio rendimiento esperado-riesgo. El equivalente en este trabajo es el espacio capital final esperado-riesgo.

Se demuestra que bajo tales supuestos hay una estructura de préstamos óptima de un banco que no está sujeto a regulaciones de capital. En qué medida cada banco opta por asignar sus fondos entre esta “cartera de mercado” de préstamos riesgosos y los préstamos interbancarios depende exclusivamente de su grado de aversión al riesgo. Bancos muy poco aversos al riesgo optarán por invertir muy poco de sus recursos en reservas o bien hacer préstamos riesgosos por un monto mayor que la suma de su capital y sus depósitos (que están dados y pagan la tasa libre de riesgo) endeudándose para ello en el mercado interbancario, mientras que bancos más aversos al riesgo mantendrán suficientes reservas.

Cuando el regulador impone un requisito de capital a través de ponderadores de riesgo, lo que hace es pedirle al banco que respete la siguiente desigualdad:

$$K \geq \Sigma_i \, k \, L_i \, w_i \,,$$

donde K es el capital del banco, k es el coeficiente de Basilea (que en el caso argentina es 11,5%), L_i es el i-ésimo préstamo y w_i es el ponderador de riesgo correspondiente al i-ésimo préstamo. La estructura de los ponderadores w_i, junto con el nivel de k, determina hasta qué punto puede prestar el banco, dado su capital. Si esos ponderadores no son adecuados, un banco que está efectivamente limitado por la regulación, o sea que cumple esta restricción con igualdad, elegirá una estructura de préstamos subóptima. Se demuestra en el trabajo que fácilmente puede darse el caso que el banco vea aumentada la probabilidad de quiebra a raíz de la existencia de la regulación, lo cual es exactamente lo opuesto del objetivo del regulador. Por lo tanto, es fundamental diseñar en forma adecuada la estructura de los ponderadores.

Lo óptimo es definir a los ponderadores asegurando que sean proporcionales a los márgenes. O sea, debe verificarse:

$$w_i = \gamma(r_i - g_i - d_i - r_o)$$

donde γ es un parámetro que define el nivel de los ponderadores, r_i es la tasa de interés del i-ésimo préstamo (o categoría de préstamos, según el nivel de desagregación que se desea efectuar o se pueda efectuar en función de las limitaciones de información), d_i es el costo esperado por incumplimiento del i-ésimo préstamo, g_i es el resto de los costos que puedan imputarse al préstamo y r_o es la tasa de interés interbancaria. Como $r_i - g_i - d_i$ es el rendimiento unitario del préstamo, el margen es la diferencia entre el rendimiento y la tasa libre de riesgo.

Si se introduce esta definición de los ponderadores en la desigualdad de arriba la restricción que enfrenta el banco es:

$$K \geq \Sigma_i \, k\gamma \, L_i \, (r_i - g_i - d_i - r_o).$$

Se demuestra que cuando los ponderadores se definen de esta manera el banco que se ve restringido por la regulación elegirá una cartera de préstamos riesgosos proporcional a la que hubiera elegido sin la regulación. Esa estructura es óptima pues minimiza la varianza del capital final esperado.

1.3. El mercado de crédito: determinación de la tasa de interés

El trabajo va mucho más allá del caso de un banco individual ya que se demuestra de qué manera se determinan las tasas de interés en el equilibrio del multimercado crediticio, tanto cuando ningún banco se ve restringido por la regulación como cuando un número arbitrario de bancos se ve restringido. Para ello se supone que la demanda de cada tipo de préstamo depende de las tasas de interés y que los ponderadores de riesgo son los óptimos. La oferta, a su vez, viene determinada por suma de las ofertas de crédito de cada banco, según que esté limitado o no por la regulación. Además, se muestra el porqué de la optimalidad de definir a los ponderadores como proporcionales a los márgenes. Tales ponderadores dan las señales apropiadas sobre el riesgo no diversificable de cada tipo de préstamo, ya que se demuestra que son proporcionales a las "betas" de los préstamos. En teoría de finanzas, la beta de un activo es la medida apropiada del riesgo no diversificable del mismo, ya que se calcula a partir de la covarianza entre el rendimiento del activo y el rendimiento de la cartera de activos "del mercado". Esta covarianza da la medida apropiada del riesgo no diversificable. El riesgo diversificable puede anularse sin costo alguno (a través de la diversificación) por lo cual nadie pagará una prima por asumirlo.

Por consiguiente, se tendría proporcionalidad entre el margen de cada préstamo, el ponderador de riesgo y la beta del préstamo:

$(r_i - d_i - g_i - r_o)$, $\quad w_i$, $\quad \beta_i$.

Como en el equilibrio del mercado de crédito el margen es proporcional a la beta del préstamo, al definir al ponderador de riesgo como proporcional al margen se está asegurando también que sea proporcional a la prima de riesgo que comanda ese préstamo. La mejor "señal" que el regulador puede dar al banco para limitar su probabilidad de quiebra es imponerle una restricción de capital que no distorsione la estructura óptima de la cartera de préstamos riesgosos.

El nivel de los ponderadores, definido en el trabajo a partir de un parámetro γ, determina (junto con k) la probabilidad de quiebra máxima que el regulador desea establecer. Los bancos prudentes no estarán limitados por la regulación. Pero el regulador puede así acotar las externalidades negativas que los bancos poco prudentes, o que no manejan bien los riesgos, producen sobre el resto de la comunidad.

1.4. Conclusión

Esta manera de diseñar los ponderadores de riesgo varía en alguna medida con respecto a como el BCRA los define actualmente. Por un lado están los ponderadores de Basilea según grandes categorías de activos que tienen que ver con el sector deudor (gobierno nacional, provincial, sector privado no financiero, entidades financieras, etc.) y con la existencia o no de garantías y su naturaleza (coparticipación, hipotecas y prendas, etc.). Por otro lado está el factor CAMEL que distingue a las entidades según su calificación. Por último, está el IRC, que complementa a los ponderadores de Basilea.

En la actual definición del IRC, sin embargo, se toma como referencia la tasa activa exclusivamente y no el margen (entre la misma, el costo esperado y la tasa considerada libre de riesgo). Además, en su implementación actual el IRC se aplica sobre financiaciones que han sido previamente neteadas del previsionamiento por incumplimiento (ambos stocks). En el trabajo, en cambio, se resta el costo esperado por incumplimiento de los flujos de ingresos generados por el préstamo. Estas operaciones no son necesariamente equivalentes y éste es uno de los temas de implementación concreta que pueden profundizarse.

En conclusión, si bien hay mucho que puede y debe profundizarse sobre la implementación concreta del IRC, el mismo tiene la potencialidad de ser un significativo avance sobre la determinación de los requisitos de capital por riesgo crediticio según las recomendaciones de Basilea.

2. El modelo

Se parte de un banco averso al riesgo que actúa como administrador de una cartera de préstamos riesgosos y de reservas no riesgosas que está financiada con depósitos y capital. Se supone que éstos últimos están dados, por lo cual el modelo determina la estructura de los activos, dado el fondeo existente. El banco está en un mercado en competencia perfecta, por lo cual es tomador de precios para las tasas activas y, por lo tanto, determina las cantidades a tener en su cartera de préstamos. El análisis es de un período. El banco obtiene un rendimiento aleatorio sobre sus préstamos debido a la aleatoriedad de los costos por incobrabilidad (netos de recuperos). Toma su decisión maximizando la utilidad esperada, donde la función de utilidad es del tipo de Von-Neumann-Morgenstern. El planteo básico toma un banco de responsabilidad ilimitada pues en este caso se obtienen resultados más claros.[4] Se supone que el costo por incobrabilidad (neto de recuperos) para las diversas categorías de préstamos se distribuye según una normal multivariada. Este supuesto permite manejar con facilidad el difícil problema de la agregación con un posible costo en cuanto a realismo.

Como en la teoría del CAPM (*capital asset pricing model*), cuando no están sometidos a requisitos mínimos de capital, todos los bancos, según su grado de aversión al riesgo, determinan la estructura de sus activos mediante una combinación del activo libre de riesgo (reservas) y una cartera compuesta cuya estructura depende exclusivamente de las características de rendimiento esperado y riesgo de sus componentes, las cuales están dadas y son iguales para todos los bancos. O sea, se supone homogeneidad en la percepción entre los diversos bancos sobre las características de los préstamos. En el caso bancario estas características vienen dadas por la matriz de varianzas y covarianzas de los costos netos por incobrabilidad y por el vector de "márgenes netos", o sea, el vector que tiene como elementos las diferencias entre las tasas de interés activas netas del costo esperado (por incumplimiento y otros) y de la tasa interbancaria (considerada libre de riesgo).

El resultado del banco dependerá básicamente de los retornos sobre sus activos. Hay n tipos de préstamos, clasificados según sus características de rendimiento y riesgo. Los bancos también pueden mantener reservas, que ganan la tasa libre de riesgo r_o, o endeudarse en el mercado interbancario a esa misma tasa. Las tasas de interés activas $r_1 .... r_n$, están dadas por el equilibrio de mercado.

Existen ciertos costos unitarios imputados por los bancos a las diversas categorías de préstamos $g_1 .... g_n$, que incluyen todos los costos relacionados

[4] En la sección 7 se esboza lo que sucede cuando hay responsabilidad limitada, o sea, cuando el banco toma en cuenta en su decisión de cartera la posibilidad de su propia quiebra (o dicho de otra manera, desdeña las consecuencias que su quiebra tiene sobre sus acreedores).

con la actividad de intermediación menos los que tienen que ver con el incumplimiento, los relacionados con el financiamiento y los que no son susceptibles de ser imputados por categoría de préstamos (si los hay). Los costos netos por incobrabilidad[5] (o por *default)* son aleatorios[6] $d_1^{\sim}$.... $d_n^{\sim}$, y se distribuyen como una normal multivariada con medias d_1.... d_n, desvíos estándar σ_1.... σ_n, y covarianzas σ_{ij} . La tasa de rendimiento sobre cada préstamo es entonces aleatoria $x_i^{\sim} = r_i - g_i - d_i^{\sim}$ y tiene media $x_i = r_i - g_i - d_i$ y desvío estándar σ_i ya que la varianza es

$$V(x_i^{\sim}) = E(x_i^{\sim} - x_i)^2 = E[r_i - g_i - d_i^{\sim} - (r_i - g_i - d_i)]^2 =$$

$$= E(-d_i^{\sim} + d_i)^2 = E(d_i^{\sim} - d_i)^2 = V(d_i^{\sim}).$$

Análogamente, σ_{ij} es asimismo la covarianza entre $x_i^{\sim}$ y $x_j^{\sim}$.

El margen entre la tasa de rendimiento sobre el préstamos de tipo i y la tasa libre de riesgo es

$$s_i^{\sim} \equiv x_i^{\sim} - r_o = r_i - g_i - d_i^{\sim} - r_o.$$

Por consiguiente, $V(s_i^{\sim}) = V(x_i^{\sim}) = V(d_i^{\sim})$ y σ_{ij} es también la covarianza entre $s_i^{\sim}$ y $s_j^{\sim}$.

En el instante inicial el banco elige la composición del activo R, L_1.... L_n, dados sus pasivos D+K y la distribución de probabilidad de sus rendimientos $x_1^{\sim}$.... $x_n^{\sim}$. Al final del período se liquida el banco, se devuelven los depósitos y los propietarios del banco reciben la diferencia entre el valor de los activos y el de los depósitos.

Por la restricción del balance, se tiene

$$R = D + K - \Sigma_i L_i, \tag{1}$$

Por lo cual determinar los préstamos (dado D+K) implica determinar simultáneamente R. Obsérvese que R puede ser negativo si el banco elige

[5] La tasa de incobrabilidad (neta) puede plantearse como la diferencia entre una tasa de incobrabilidad bruta (e_i) y una tasa de recupero en caso de incumplimiento (f_i).
[6] Una tilde al lado de una variable indicará que se trata de una variable aleatoria. La misma variable sin la tilde indicará el valor medio de la variable.

endeudarse en el mercado interbancario.[7] A diferencia de lo supuesto para R, se supone que $L_i \geq 0$ para todo i, o sea, que no puede tenerse posiciones "cortas" en préstamos.

Como las tasas de rendimiento son aleatorias, también lo es el capital final:

$K_1^{\sim} = \Sigma_i L_i (1+ x_i^{\sim}) + (D + K - \Sigma_i L_i) (1+ r_o) - D(1+ r_o) - Kg_o =$

$= K(1+ r_o- g_o) + \Sigma_i L_i (x_i^{\sim}- r_o)$,

donde g_o representa los costos no financieros ni de incobrabilidad que no puedan imputarse a las categorías de préstamos, expresados como fracción del capital.

Si se define el "capital ajustado"

$K' = K(1 + r_o - g_o)$,

el capital final se reduce a

(2) $$K_1^{\sim} = K' + \Sigma_i L_i s_i^{\sim}.$$

Por consiguiente, la esperanza y la varianza de $K_1^{\sim}$ están dados por

(3) $$\mu \equiv E(K_1^{\sim}) = K' + \Sigma_i L_i s_i$$

(4) $$\sigma^2 \equiv V(K_1^{\sim}) = \Sigma_i L_i^2 \sigma_i^2 + \Sigma_{i\neq j} L_i L_j \sigma_{ij} .$$

Usando notación vectorial, las últimas tres expresiones pueden escribirse como[8]

(2') $$K_1^{\sim} = K' + L's^{\sim}.$$

(3') $$\mu = K' + L's$$

[7] Para introducir un poco de realismo puede suponerse que más allá de cierto endeudamiento en el mercado interbancario o bien el banco no puede endeudarse más o bien la tasa de interés comienza a subir, lo cual equivale a suponer que el endeudamiento del banco deja de ser libre de riesgo. Pero en este trabajo se supone que ningún banco llega a ese tramo de la frontera eficiente.

[8] Una apóstrofe en un vector denotará trasposición. Por consiguiente, si L se define como un vector columna, L' denota un vector fila.

(4’) $\sigma^2 = L'ML,$

donde

$L = (L_1.... L_n)'$ es el vector (columna) de préstamos,
$s = (s_1.... s_n)'$ es el vector (columna) de márgenes medios,
M es la matriz cuadrada de varianzas y covarianzas.

Por las definiciones de x y s, se verifican las identidades

$s \equiv x - r_o u \equiv r - g - d - r_o u,$

donde x, r, d, g son los vectores columna de tasas de rendimiento, tasas de interés activas, costos por incobrabilidad y otros costos, respectivamente, y u es el vector columna de unos.

Por último, se supone que el vector $d^{\sim}$, y por lo tanto el vector $s^{\sim}$, tiene una distribución normal multivariada

$d^{\sim} \sim N(d, M), \quad s^{\sim} \sim N(s, M).$

En particular, esto implica que la distribución de $K_1^{\sim}$, al ser función lineal de variables aleatorias normales, es también normal y está completamente caracterizada por la media (3’) y la varianza (4’). [9]

3. El problema de decisión del banco libre de regulaciones

El banco se comporta como administrador de cartera. Maximiza la utilidad esperada

(5) $E(u(K_1^{\sim}))$

donde u(.) es una función de utilidad de Von-Neumann-Morgenstern que es creciente con utilidad marginal decreciente (u’>0, u”<0) y estrictamente quasi-

[9] Los componentes de un vector normal multivariado son normales. El supuesto de normalidad es importante para permitir un tratamiento adecuado del problema de cartera sin restringir indebidamente las preferencias de los bancos (imponiendo, por ejemplo, una función de utilidad cuadrática). No se entrará aquí en el tema de hasta qué punto puede relajarse el supuesto de normalidad.

cóncava. Bajo estos supuestos puede demostrarse que la utilidad esperada (5) y la probabilidad de quiebra del banco (Prob($K_1^{\sim}$ < 0)) sólo dependen de μ y σ. Por un lado, la utilidad esperada puede escribirse como:

$$(6) \qquad E(u(K_1^{\sim})) = \int_{-\infty}^{-\infty} u(\mu + \sigma y)\phi(y)dy \equiv U(\mu,\sigma),$$

donde $\phi(y)$ es la función de densidad de la distribución normal estandarizada.[10] El lado derecho de la igualdad sólo depende de μ y σ, por lo cual se la denomina $U(\mu,\sigma)$. Esta función de utilidad es creciente con μ y decreciente con σ.[11] Además, puede demostrarse que es cóncava.

Por otro lado, por el supuesto de normalidad la probabilidad de que quiebre el banco (o sea, de que su patrimonio termine siendo negativo) es:

$$(7) \qquad Prob(K_1^{\sim} < 0) = Prob(\ (K_1^{\sim} - \mu)/\sigma < -\mu/\sigma\ ) = \Phi(-\mu/\sigma)$$

donde $\Phi(.)$ es la función normal estandarizada acumulada. Por lo tanto, la probabilidad de quiebra del banco es decreciente con respecto a μ y creciente con respecto a σ.

Por último, por (3') y (4'), μ y σ dependen de las variables de decisión, o sea, del vector de préstamos L, por lo cual el problema de decisión del banco es encontrar el vector L que maximice su función de utilidad:

$$(8) \qquad \max_{L}\ U(\mu(L), \sigma(L)) = U(\ K' + L's, (L'ML)^{1/2}\ ).$$

Se supone en esta sección que el banco no está sujeto a ninguna regulación de capital mínimo. Por ello, no hay ninguna restricción adicional en (8).

[10] La identidad define a la función U. La igualdad expresa la definición de la esperanza matemática de una función u de una variable normal caracterizada por los parámetros μ y σ. Como $K^{\sim}$ está distribuida normalmente con media μ y desvío estándar σ, su esperanza es $\int u(K_1^{\sim})N(K_1^{\sim};\mu,\sigma)dK_1^{\sim}$, donde N(.) es la función de densidad de la distribución normal con parámetros μ, σ. Si se realiza el cambio de variables $y = (K_1^{\sim}-\mu)/\sigma$, resulta $dK_1^{\sim} = \sigma dy$ y se obtiene (6).

[11] Como u(.) es creciente, al crecer μ crece $U(\mu,\sigma)$. Además, como $\phi(y)$ es simétrica, puede escribirse como

$$U(\mu,\sigma) = \int_{0}^{\infty} [u(\mu - \sigma y) + u(\mu + \sigma y)]\phi(y)dy.$$

Si el término entre corchetes es decreciente con σ (dado y) entonces U es decreciente con σ. La derivada del término entre corchetes con respecto a σ es $[u'(\mu + \sigma y) - u'(\mu - \sigma y)]y$. Como $\mu + \sigma y > \mu - \sigma y$ y $u''<0$, para $y>0$ esta expresión es negativa. QED.

Igualando a cero el vector de derivadas parciales de U con respecto a L (condición necesaria para un máximo[12]) se tiene

$$U_\mu s + U_\sigma (ML)/\sigma = 0 \tag{9}$$

de donde se despeja el vector de préstamos óptimos

$$L^* = (1/\theta)M^{-1}s \tag{10}$$

donde $\theta \equiv -U_\sigma/\sigma U_\mu$ es el coeficiente de Arrow-Pratt de aversión (absoluta) al riesgo del banco. Las reservas del banco, por consiguiente, son:

$$R^* = D + K - u'L^* = D + K - (1/\theta)uM^{-1}s. \tag{11}$$

Se observa que si todos los bancos enfrentan las mismas tasas de interés, los mismos costos unitarios y la misma distribución de probabilidades de costos por incobrabilidad, distintos bancos difieren en su vector de préstamos óptimo sólo en un factor escalar dado por su coeficiente de aversión al riesgo. Como se ve en el Gráfico 1 un banco más averso al riesgo (Banco 1) tendrá una proporción mayor de su cartera en reservas y viceversa. Un banco poco averso al riesgo (Banco 2) puede tener más que D+K invertido en préstamos si se endeuda en el mercado interbancario ($R^*<0$). En el Apéndice se obtienen las fórmulas de la frontera eficiente cuando no hay activo libre de riesgo (la curva en el Gráfico 1) y cuando sí lo hay (la recta en el Gráfico 1).

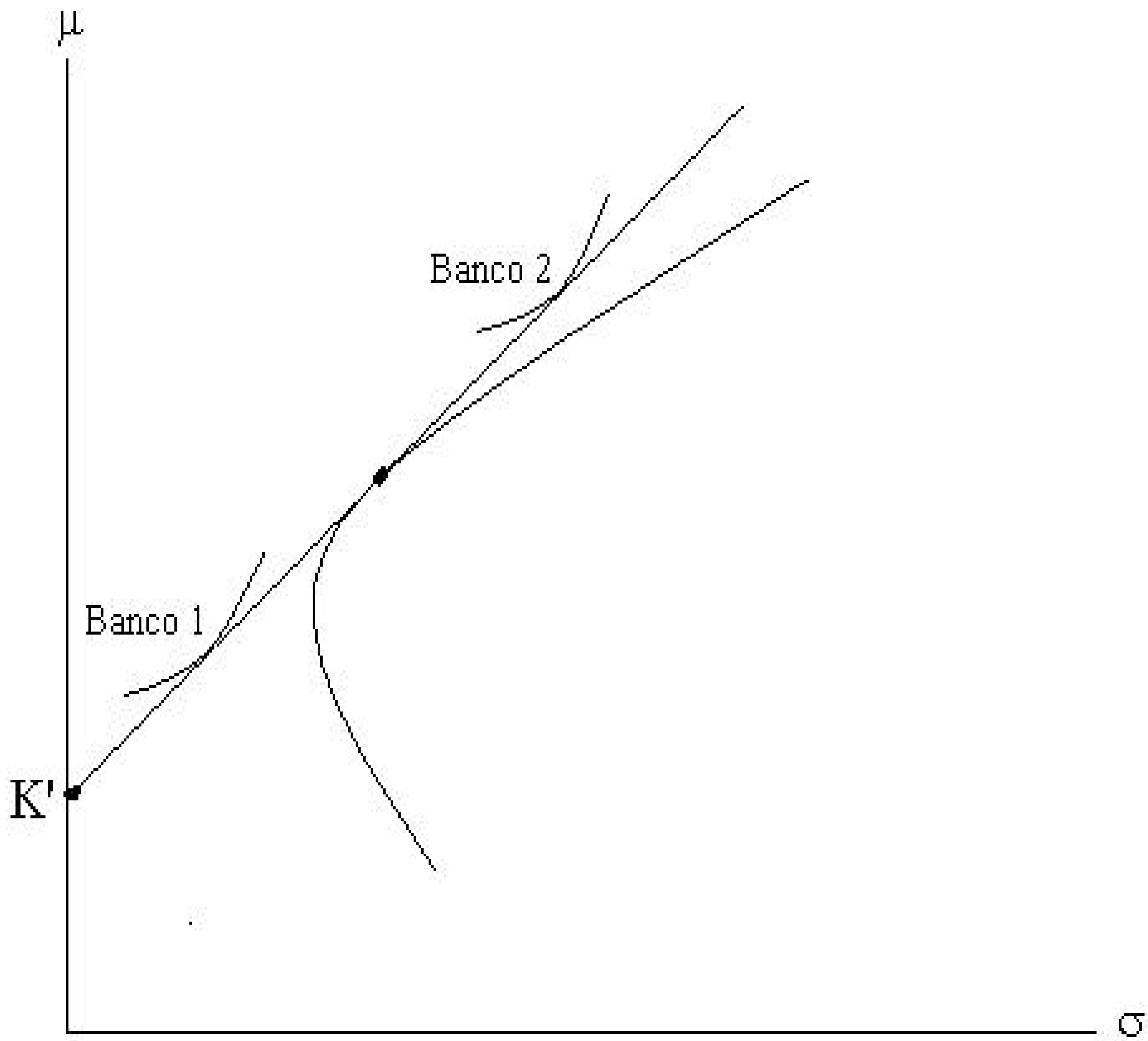
Reemplazando (10) en (3') y (4') se ve que en el óptimo la esperanza y el desvío estándar de $K_1^{\sim}$ son:

$$\mu^* = K' + (1/\theta)b \tag{12}$$

$$\sigma^* = (1/\theta)\sqrt{b} \tag{13}$$

[12] Las condiciones de segundo orden se cumplen por ser M definida positiva. Véase en Goldberger (1964, proposición (3.55)) la demostración de que una matriz de covarianzas es definida no negativa y de que es definida positiva si y sólo si los $d_i^{\sim}$ son linealmente independientes.

Gráfico 1



donde, para abreviar notación, se ha definido:

(14) $b \equiv s'M^{-1}s.$

Por consiguiente, a partir de (12) y (13) se observa que existe una relación lineal entre el capital final esperado y el riesgo:

(15) $\mu^* - K' = \sqrt{b}\sigma^*.$

Esta relación es igual para todos los bancos, independientemente de cual es su aversión al riesgo. En el Gráfico 1 esto simplemente indica que, dado K’, un banco siempre se ubica en la frontera eficiente dada por la recta que parte de K’ con pendiente $\sqrt{b}$.[13] El grado de aversión al riesgo sólo indica donde se ubica en esa recta. Dados dos bancos con el mismo K’, por ejemplo, se ve en el gráfico que el banco 1, es muy averso al riesgo y tiene D+K invertidos en partes similares entre la cartera de mercado de préstamos riesgosos (μ_M,σ_M) y el activo libre de riesgo (o sea, presta en el mercado interbancario). En cambio el banco 2 prefiere tener una cartera de préstamos mucho más grande endeudándose en el mercado interbancario.

Por (7), entonces, la probabilidad de quiebra del banco es

(16) $$\text{Prob}(\tilde{K_1} < 0) = \Phi(- [K' + b/\theta]/(\sqrt{b}/\theta)) =$$

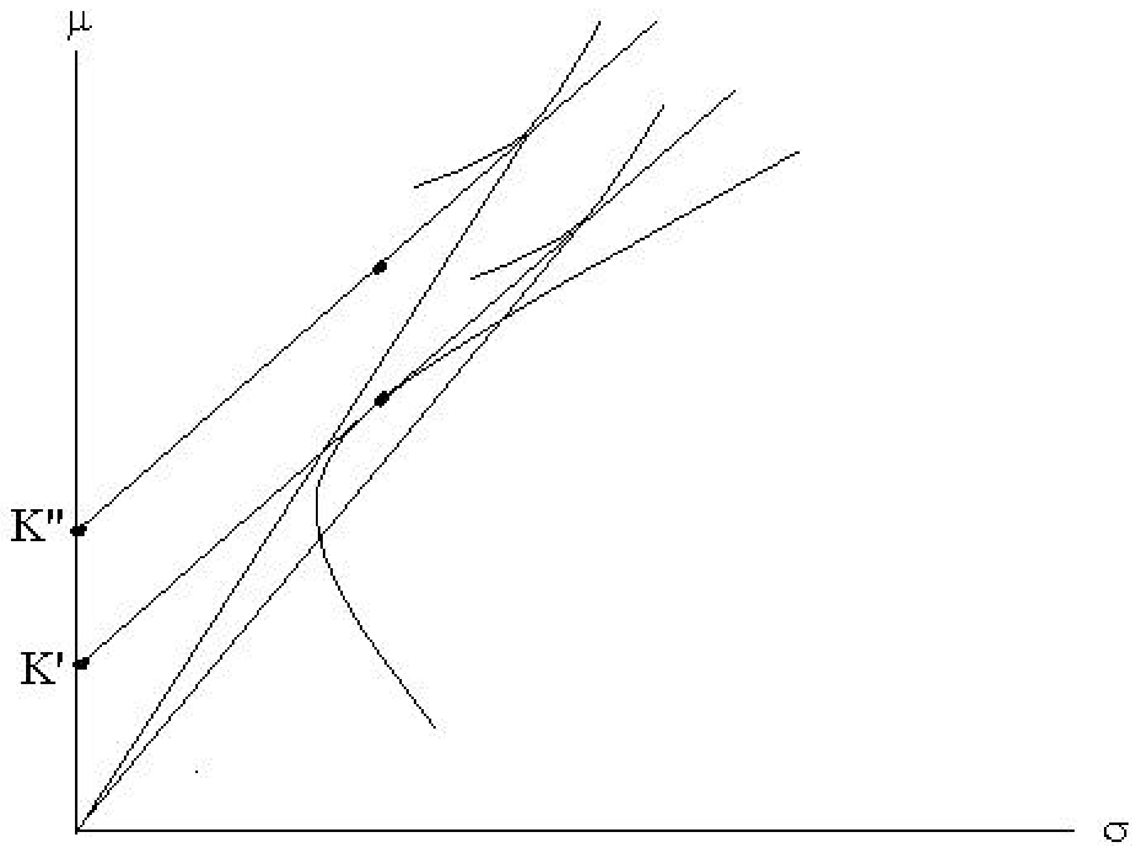
$$= \Phi(- \sqrt{b}\, [(\theta K'/b) + 1]).$$

Se observa que la probabilidad de quiebra varía inversamente con el capital inicial (incluido en K’) y con el coeficiente de aversión al riesgo. Los bancos menos aversos al riesgo, o sea con menor θ, tienen una mayor parte de su activo en préstamos riesgosos y una menor parte en reservas (que están libre de riesgo). Como se ve en (16), en principio esto podría compensarse con un mayor capital. En el Gráfico 2 se muestra el efecto de un aumento en K con una correspondiente disminución en D. Estos cambios tienen el efecto de desplazar paralelamente hacia arriba la recta que parte de K’, de manera tal que no importa cual sea su grado de aversión al riesgo aumenta la razón μ^*/σ^*, la que en el gráfico está dada por la pendiente entre el origen de coordenadas y el punto elegido[14]. Pero como no todos los bancos administran bien los riesgos y una mala administración genera fuertes externalidades negativas que ponen en riesgo al sistema financiero en su conjunto, el Banco Central exige un capital mínimo, tema del cual se encarga la siguiente sección.

[13] En la sección I del Apéndice se demuestra que (15) es justamente la fórmula de la frontera eficiente cuando existe un activo libre de riesgo.

[14] El cambio en K también tiene el efecto de desplazar hacia arriba la curva que representa la frontera de varianza mínima de los préstamos riesgosos, lo que se omitió en el gráfico para no recargarlo. La demostración de esta afirmación puede encontrarse en la sección III del Apéndice. Si la función de utilidad es de la familia CARA (*constant absolute risk aversion*) el coeficiente θ es constante. Además, puede demostrarse que la pendiente de una curva de indiferencia es $-U_\sigma/U_\mu = \theta\sigma$, o sea es independiente de μ. Por ello, si la frontera de eficiencia se traslada hacia arriba en forma paralela el nuevo punto de tangencia con una curva de indiferencia está directamente arriba del viejo.

Gráfico 2



4. El problema de decisión del banco sujeto a requisitos de capital

Se supone ahora que el Banco Central impone un capital mínimo definido como una fracción k de los activos, los cuales están ponderados según ciertos coeficientes w_i (definidos por el Banco Central[15]) que conviene expresar en forma vectorial:

[15] En el caso argentino, k es actualmente igual al producto de 11,5% y el "factor CAMEL", mientras que w_i es una combinación del "ponderador de riesgo a la Basilea" y el "indicador de riesgo crediticio".

(17) $w' = (w_1 .... w_n)$.

Por consiguiente, el banco debe tener un nivel de capital inicial K que satisface la restricción

(18) $K \geq k(L'w)$

y su problema es ahora

(19) $\max_{L} U(\mu(L), \sigma(L))$ sujeto a (18).

Para resolver este problema se forma el Lagrangeano:

(20) $U(K' + L's, (L'ML)^{1/2}) - \nu(kL'w - K)$

donde $\nu \geq 0$ es el multiplicador de Lagrange. Según las condiciones de Kuhn-Tucker, en primer lugar se iguala a cero el vector de derivadas parciales con respecto a L, como antes, lo que ahora da

(21) $U_{\mu}s + U_{\sigma}ML/\sigma - \nu kw = 0$.

De (21) se despeja el vector de préstamos óptimo

(22) $L^{\bullet} = (1/\theta)M^{-1}(s - \nu kw/U_{\mu})$.

Además, según las condiciones de Kuhn-Tucker, debe cumplirse la igualdad

(23) $\nu(kL'w - K) = 0$

que indica que si en el óptimo la restricción (18) se cumple con desigualdad, el multiplicador de Lagrange ν debe ser igual a cero, en cuyo caso (22) se reduce a (10) y el banco no se ve afectado por el requisito.

En cambio, si la restricción (18) se cumple con igualdad el multiplicador de Lagrange es positivo y, como se comprueba comparando (22) con (10), la oferta de préstamos será menor que en el caso sin restricción siempre que el ponderador w_i correspondiente sea positivo. En tal caso, excepto cuando el vector de ponderaciones w es proporcional al vector de márgenes netos s, el vector óptimo para el banco tendrá una estructura diferente a la del banco libre de regulaciones. Además, puede comprobarse que en ese caso el vector de préstamos no minimiza la varianza de la cartera, por lo cual el Banco Central habrá elegido a los ponderadores w en forma subóptima[16].

Sin embargo, se verá ahora que si el vector de ponderaciones w es proporcional al vector de márgenes netos s, entonces todos los bancos tienen vectores de préstamos óptimos eficientes y proporcionales a $M^{-1}s$, aun los que están limitados por la regulación. Supóngase que $\gamma>0$ es el factor de proporcionalidad:

(24) $$w = \gamma s$$

En tal caso, un banco limitado tiene, según (22), un vector de ofertas de préstamos

(25) $$L^{\bullet} = (1/\theta)\,(1-\nu k\gamma/U_{\mu})M^{-1}s.$$

Obsérvese que este vector es proporcional al dado por (10), y que la oferta de una categoría i de préstamos es menor que en el caso no regulado si esta última es positiva ($L_i^{\bullet} < L_i^*$ siempre que $L^{\bullet}_i>0$). Además, introduciendo (24) y (25) en la restricción (18) (con signo de igualdad, para representar el caso de un banco limitado por la restricción) puede eliminarse el multiplicador de Lagrange de (22) pues se deduce

(26) $$\nu k\gamma/U_{\mu} = 1 - \theta K/(k\gamma b)$$

por lo cual $L^{\bullet}$ se reduce a:

(27) $$L^{\bullet} = [K/(\gamma kb)]M^{-1}s.$$

Por consiguiente, introduciendo (27) en (3') y (4'), se comprueba que el capital final esperado y el riesgo de un banco limitado son:

(28) $$\mu^{\bullet} = K' + K/\gamma k$$

[16] En la sección V del Apéndice se demuestra que si el Banco Central elige w de tal manera que se minimice la varianza de la cartera de un banco restringido por la regulación, el w óptimo debe ser proporcional a s.

(29) $\sigma^{\bullet} = K/(\gamma k\sqrt{b})$

Además, introduciendo estas expresiones en (7) (y recordando la definición de K') se ve que la probabilidad de quiebra del banco limitado por la regulación es

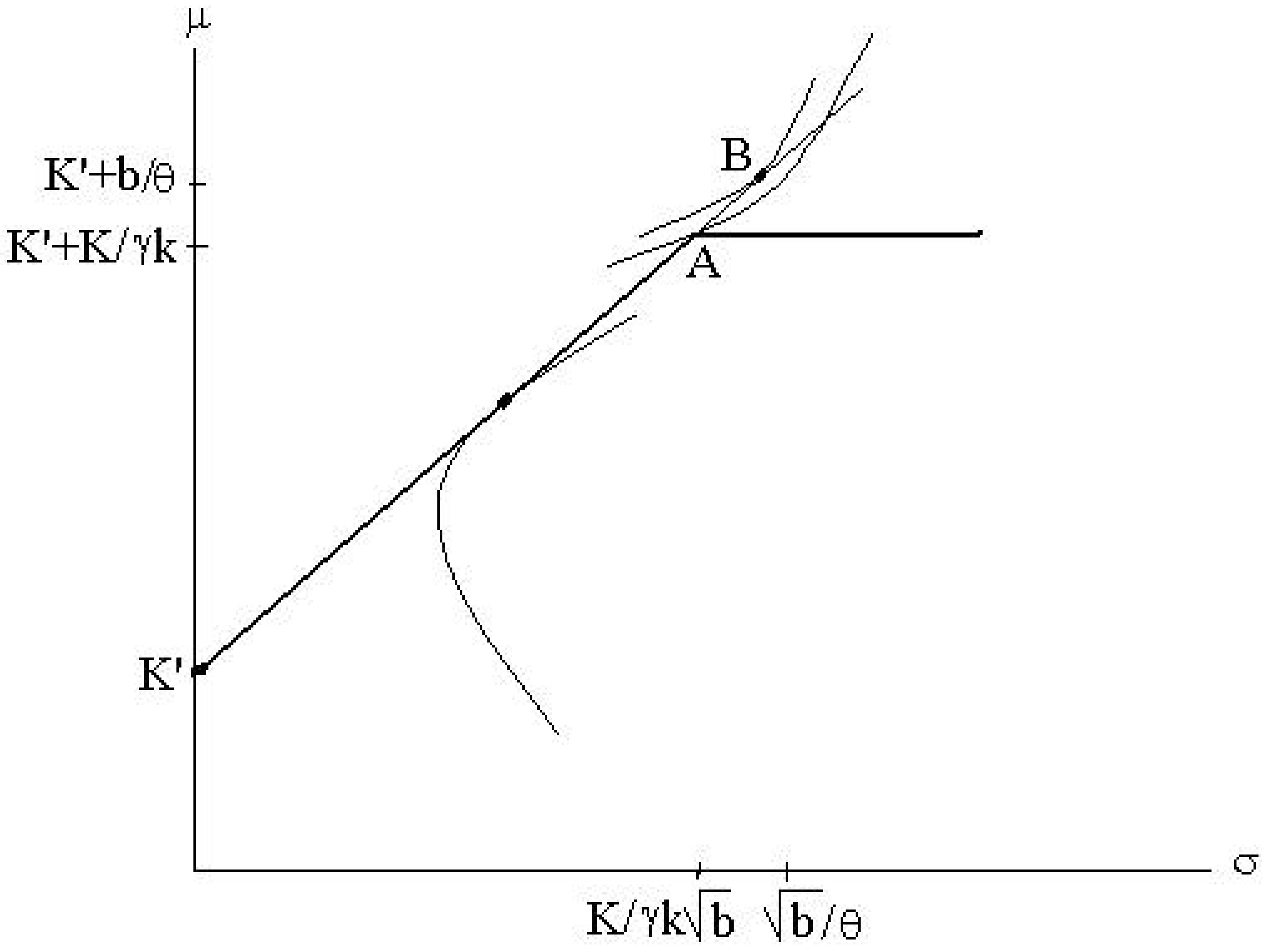
(30) $$\mathrm{Prob}(K_1^{\sim} < 0) = \Phi(- [K' + K/k\gamma]/(K/(k\gamma\sqrt{b}))$$
$$= \Phi(- \sqrt{b}\, [k\gamma K'/K + 1]) = \Phi(- \sqrt{b}\, [k\gamma(1+ r_o- g) + 1]).$$

Por consiguiente, cuanto mayores son los parámetros k y γ establecidos por el Banco Central menor es la probabilidad de quiebra del banco que está restringido en su accionar por la regulación.

En el Gráfico 3 se observa el efecto de la imposición del requisito de capital para un banco que se ve limitado por la restricción. Se observa que el efecto es el de introducir una solución de esquina en el punto A que no es la que desearía tener el banco (que corresponde al óptimo sin restricción en el punto B) pero sí implica un menor riesgo de cartera por unidad de ganancia esperada. Mientras el banco quisiera tener un riesgo $\sqrt{b}/\theta$ con un capital final esperado $K'+b/\theta$, debe conformarse con un nivel de riesgo $K/k\gamma\sqrt{b}$ con un capital final esperado de $K'+K/k\gamma$. Por supuesto, pueden haber otros bancos que no se vean afectados por la regulación porque su aversión al riesgo es suficientemente elevada como para elegir un punto sobre la recta que parte de K' que esté por debajo de la esquina en que la frontera eficiente se hace horizontal.[17]

[17] Obsérvese que las desigualdades $\mu^{\bullet} < \mu^{*}$ y $\sigma^{\bullet} < \sigma^{*}$ se dan si y sólo si $\theta < \gamma kb/K$, o sea, si la aversión al riesgo es suficientemente pequeña. Además, premultiplicando (10) por s' se comprueba que $b = \theta s'L^*$, por lo cual la última desigualdad se cumple si y sólo si $K < k(L^{*\prime}\gamma s)$, o sea, el capital inicial es insuficiente para que el banco pueda obtener su óptimo libre de regulaciones.

Gráfico 3



5. Equilibrio de mercado y CAPM bancario cuando no hay regulaciones

Hasta ahora se ha estado considerando un banco individual que toma las tasas de interés del mercado como dadas debido al supuesto de competencia perfecta. En esta sección se considera al conjunto de bancos (con índices b=1,...,B) y se determina el vector de tasas de interés que equilibran al mercado en ausencia de regulaciones de capital mínimo. Según lo visto en la sección 2, cuando los bancos no están sujetos a regulaciones, tienen préstamos y reservas dados por:

(31) $$L_b = (1/\theta_b)M^{-1}s$$

(32) $$R_b = D_b + K_b - (1/\theta_b)uM^{-1}s$$

Por consiguiente, sumando sobre los B bancos se tiene

(33) $$L_M = (1/\theta_M)M^{-1}s$$

(34) $$R_M = D_M + K_M - (1/\theta_M)uM^{-1}s$$

donde u es el vector de unos, las variables L_M, R_M, D_M y K_M indican las sumas de las respectivas variables sobre todos los bancos y análogamente se define el coeficiente de aversión al riesgo del mercado θ_M como

(35) $$1/\theta_M \equiv \Sigma_b (1/\theta_b).$$

Se supone que las demandas de crédito por parte del sector no financiero están dadas por el vector de demandas

(36) $$L^D(r, r_o),$$

cada uno de cuyos componentes depende del vector de tasas de interés r y de la tasa libre de riesgo, como se indica. En el equilibrio de mercado la oferta de préstamos debe ser igual a la demanda, por lo cual igualando (33) y (36), reordenando y teniendo en cuenta la definición de s se tiene:

(37) $$\theta_M ML^D(r,r_o) + d + g + r_o u = r.$$

Esta fórmula descompone convenientemente a cada tasa de interés activas en la suma de costos (de financiamiento, de incobrabilidad esperada y otros) y una prima de riesgo que depende de la aversión al riesgo del mercado y de la covarianza entre el rendimiento de los respectivos préstamos y la cartera de préstamos del mercado.[18]

Por otro lado, en el mercado interbancario la suma de todas las demandas de reservas (que pueden ser negativas, lo que indicaría una oferta) debe ser igual

[18] En general, la covarianza entre dos carteras (vectores) de préstamos L_A y L_B es $L_A'ML_B$. Si $L_A = e_i$ donde e_i es el vector con un uno en el i-ésimo lugar y ceros en los restantes y si $L_B = L^D$, o sea, el vector de préstamos del mercado, la covarianza es $e_iML^D = M_i L^D$ donde M_i es la i-ésima fila de M.

a cero (suponiendo una economía cerrada). Por consiguiente, igualando R_M a cero en (34), teniendo en cuenta la definición de s (=r-d-g- r_ou) y despejando la tasa libre de riesgo, se tiene

(38) $$[u'M^{-1}(r\text{-}d\text{-}g) - \theta_M (D_M+K_M)]/(u'M^{-1}u) = r_o.$$

Obsérvese que (37) y (38) conjuntamente indican que (r, r_o) es un punto fijo de la transformación definida por los lados izquierdos de las dos expresiones. No se entrará aquí en la cuestión de las condiciones suficientes para la existencia y unicidad de ese punto fijo ni en la cuestión de la dinámica que llevaría él (o ellos). A los fines de este trabajo, lo importante es mostrar que las tasas de interés de equilibrio provienen de la solución conjunta de estas dos expresiones.

Se verá ahora que lo visto es en esencia el modelo análogo al CAPM que surge en el contexto bancario. A diferencia del modelo CAPM para activos mercadeables, en el contexto bancario no se trata de un modelo de precios de equilibrio de los activos sino de las tasas de interés de equilibrio de los préstamos.

Sumando las expresiones (3') para todos los bancos y recordando que ahora la ausencia de subíndice indica la suma sobre b así como el hecho de que (33) debe ser igual a la suma de todas las ofertas de préstamos se tiene:

(39) $$\mu_M = K_M' + L^D(r,r_o)'s$$

Análogamente, la varianza de la cartera agregada de equilibrio es:

(40) $$\sigma_M^2 = L^D(r,r_o)'M\, L^D(r,r_o).$$

Por otro lado, (37) equivale a

(41) $$\theta_M\, M\, L^D(r,r_o) = s$$

por lo cual premultiplicando por L^{D}', teniendo en cuenta (3') y (40) y despejando el coeficiente de aversión al riesgo del mercado se tiene:

(42) $$\theta_M = (\mu_M - K_M')/\sigma_M^2.$$

Reemplazando esta expresión en (37) se tiene la expresión para el CAPM bancario:

(43) $$r - d - g - r_o u = (\mu_M - K_M')\beta$$

donde se ha definido el vector de los beta:

(44) $$\beta \equiv ML^D(r,r_o)/\sigma_M^2.$$

Obsérvese que los elementos de este vector son

(45) $$\beta_i \equiv M_i L^D(r,r_o)/\sigma_M^2 = \Sigma_j\ \sigma_{ij} L_j^D(r,r_o)/\sigma_M^2$$

Al multiplicar la i-ésima fila de la matriz M por el vector de préstamos agregados de equilibrio se tiene la covarianza del rendimiento de una unidad del préstamo i con el rendimiento de la cartera de préstamos del mercado. Esa covarianza, dividida por la varianza del rendimiento de la cartera de préstamos del mercado, es la medida adecuada de la cantidad de riesgo que importa el préstamo i tomado individualmente y sólo así puede compararse con el riesgo de una cartera diversificada. Cuando un préstamo tiene un β_i superior (inferior) a la unidad, tiene un riesgo por encima (por debajo) de la cartera de mercado (la cual tiene un beta igual a la unidad como se comprueba premultiplicando el lado derecho de (44) por $L^D(r,r_o)'$).

Tanto cuando no había regulaciones de capital (sección 2) como cuando las había (sección 3) (con la adecuada elección del vector de ponderadores de riesgo) se vio que la cartera de préstamos que elige cada banco es tal que premultiplicada por la matriz M el vector resultante es proporcional al vector s de márgenes netos. Cuando se afirmó que el vector de ponderaciones w debía ser diseñado para que fuera proporcional a s, por lo visto en la presente sección se estaba también afirmando implícitamente que debía ser proporcional al vector β (como indica (43)). Esta es una conclusión fundamental para el tópico de cual debe ser el requisito de capital óptimo. Los ponderadores de riesgo deben ser proporcionales a los beta de los respectivos préstamos y, por consiguiente, a la prima de riesgo que exige el mercado sobre la tasa interbancaria. De tal manera la regulación estará cumpliendo el objetivo de limitar el riesgo de los bancos menos aversos al riesgo sin introducir distorsiones a través de la regulación.

6. Equilibrio de mercado y CAPM bancario cuando hay regulaciones

Podría argumentarse que en el desarrollo que se hizo en la sección precedente se supuso que los bancos no estaban limitados por regulaciones en su decisión. Por ello, en esta sección se demuestra que aún tomando en cuenta que algunos (o todos los) bancos pueden estar efectivamente limitados, si los ponderadores de riesgo son los óptimos sigue teniendo validez el desarrollo de esta sección si bien el vector de préstamos agregados será menor (pero proporcional) al que corresponde al caso sin regulación siempre que algún banco se vea limitado en su accionar. Además, el vector de tasas de interés no será el mismo que en el caso sin regulación.

Supóngase ahora que N de los B bancos no están restringidos por la regulación mientras que los restantes B-N sí lo están. Entonces las ofertas de préstamos y de reservas son:

$$L_b = (1/\theta_b)M^{-1}s, \qquad b=1,...,N$$

$$L_b = [K/(\gamma kb)]M^{-1}s, \qquad b=N+1,...,n.$$

$$R_b = D_b + K_b - (1/\theta_b)u'M^{-1}s, \qquad b=1,...,N$$

$$R_b = D_b + K_b - [K/(\gamma kb)]u'M^{-1}s \qquad b=N+1,...,n.$$

Por consiguiente, sumando sobre los n bancos se tiene

(46) $$L_M = (1/\xi)M^{-1}s$$

(47) $$R_M = D_M + K_M - (1/\xi)u'M^{-1}s,$$

donde se ha definido

(49) $$1/\xi \equiv 1/\theta_N + (B-N)K/(\gamma kb)$$

y ahora $1/\theta_N$ es la suma de los $1/\theta_b$ sobre los N bancos no restringidos.

Por consiguiente, igualando la oferta agregada de préstamos (46) a la demanda e igualando a cero la demanda agregada de reservas (47) se tiene ahora las condiciones de equilibrio de mercado:

$$\text{(50)} \qquad \xi M\, L^D(r,r_o) + d + g + r_o u = r.$$

$$\text{(51)} \qquad [u'M^{-1}(r\text{-}d\text{-}g) - \xi(D_M + K_M)]/(u'M^{-1}u) = r_o.$$

Nuevamente, (50) y (51) conjuntamente indican que (r, r_o) es un punto fijo de la transformación definida por los lados izquierdos de las dos expresiones.

Los pasos para demostrar el CAPM bancario cuando hay bancos limitados por el requisito de capital son exactamente iguales que los de la sección anterior. Sólo debe reemplazarse θ por ξ por doquier, llegándose a exactamente la misma expresión (43). Debe advertirse, sin embargo, que ni las tasas de interés ni el vector de préstamos agregados son iguales a los obtenidos en la sección precedente debido a los efectos de la regulación en el equilibrio del mercado de préstamos.

7. El caso del banco con responsabilidad limitada

Cuando hay responsabilidad limitada al banco no le interesa los estados "de la naturaleza" en que sobreviene su propia quiebra, excepto en la medida que se suponga que tiene ciertos costos asociados a la quiebra. Fundamentalmente, si su patrimonio termina siendo negativo no será el banco el que sufra las consecuencias, excepto por un costo específico que genera el proceso de quiebra. Por eso, la utilidad esperada tiene ahora dos componentes que separan a los "estados de la naturaleza" de no quiebra y quiebra, respectivamente:

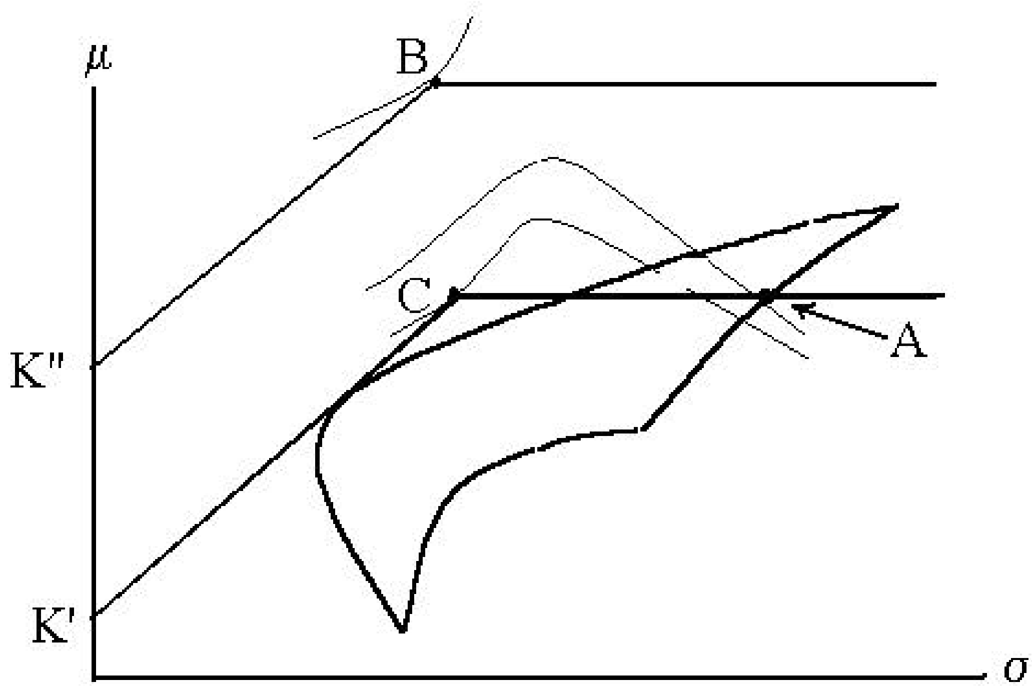
$$\text{(52)} \qquad E(u(K_1^{\sim})) = \int_{-\mu/\sigma}^{\infty} u(\mu + \sigma y)\phi(y)dy - C\Phi(-\mu/\sigma) \equiv U(\mu,\sigma),$$

El primer término es similar al que se tenía bajo responsabilidad ilimitada con la excepción de que sólo se toma en cuenta los estados en que el patrimonio neto termina siendo no negativo, $K_1^{\sim} \geq 0$. Normalizando la variable $K_1^{\sim}$, esto equivale a sólo tomar los valores de $y^{\sim} = (K_1^{\sim} - \mu)/\sigma$ mayores que $-\mu/\sigma$. El segundo término toma en cuenta que, cuando quiebra, el banco tiene un costo C dado exógenamente. Por consiguiente, el segundo componente es el costo de quiebra multiplicado por la probabilidad de quiebra (o sea, la acumulación de $\phi(y)$ entre menos infinito y $-\mu/\sigma$)[19].

[19] Véase Rochet (1992).

Está claro que nuevamente la utilidad esperada depende exclusivamente de los dos parámetros μ y σ. Sin embargo, ahora la función U no es necesariamente decreciente con σ ni es necesariamente cóncava.
Rochet (1992) demuestra que si μ (y, por consiguiente, K) es suficientemente bajo, para σ suficientemente elevada el banco se vuelve amante del riesgo, por lo cual U crece con σ. O sea, se tiene un problema de "riesgo moral" derivado

Gráfico 4



de la protección que la responsabilidad limitada le otorga al banco. Esto es problemático pues puede invalidar las virtudes de la regulación de capital a través de ponderadores de riesgo que se detalló en las secciones precedentes. Esto se puede ver en el Gráfico 4, donde se ve que con el capital que corresponde a K' el banco prefiere el punto A al punto C. En el punto A, el banco cumple con la restricción de capital que, bajo responsabilidad ilimitada, lo llevaría a preferir el punto C. Pero debido a su responsabilidad limitada el banco elige una combinación de activos que si bien cumple la regulación, lo hace optando por una cartera de préstamos que incluye más préstamos muy riesgosos y menos préstamos poco riesgosos. De tal forma, satisface su apetencia por el riesgo e invalida el intento del Banco Central de limitarle el riesgo. Rochet sugiere que la solución desde el punto de vista regulatorio puede ser imponer adicionalmente un nivel de capital mínimo absoluto. En el gráfico el banco debería incrementar su capital de manera tal que se desplazara hacia arriba el conjunto factible hacia el terreno en el cual sus preferencias son localmente aversas al riesgo, o sea, el punto B.

7. Conclusiones

Se ha visto que la novedosa regulación prudencial sobre riesgo crediticio que existe en Argentina, incorporando un Indicador de Riesgo Crediticio que vincula la ponderación de riesgo crediticio de un préstamo con la tasa de interés, tiene gran sentido económico, particularmente si se modifica para tomar en cuenta como referencia para los ponderadores de riesgo de los préstamos, en lugar de la tasa de interés, el margen entre la misma, neteada del costo esperado por incobrabilidad y de otros costos, y la tasa interbancaria. La razonabilidad de este criterio radica en que bajo condiciones competitivas ese margen es la prima de riesgo que el mercado exige por encima de los costos asociados a ese préstamo. Ello se debe a que ese margen es proporcional al "beta" del préstamo, o sea, a la covarianza de su rendimiento con el de la "cartera de préstamos del mercado". El hecho de que la gran mayoría de los bancos sean de responsabilidad limitada introduce una gran complejidad pues este hecho puede llevarlos a tener actitudes amantes del riesgo si sus niveles de capitalización son muy reducidos aun si cumplen el requisito de capital definido en función de los ponderadores de riesgo. Por ello, es aconsejable tener adicionalmente un nivel mínimo absoluto de capital que impida a todos los bancos ubicarse dentro del terreno en que es más probable que surja la propensión por el riesgo.

Apéndice matemático

I. Derivación de la frontera de eficiencia cuando hay un activo libre de riesgo

Cuando hay un activo libre de riesgo puede obtenerse la fórmula de la frontera eficiente en el plano μ, σ minimizando la varianza del capital final dado un nivel para la media del capital final[20]:

$$\min_{L} \ (1/2)\, L'ML \quad \text{sujeto a } \mu_o = K' + L's$$

El lagrangeano es:

$$(1/2)\, L'ML + \rho(\mu_o - K' - L's)$$

donde ρ es el multiplicador de Lagrange. Por consiguiente, las condiciones de primer orden son:

(1) $\quad ML - \rho s = 0$

(2) $\quad \mu_o = K' + L's$

De (1) se despeja

(3) $\quad L = \rho M^{-1}s.$

Trasponiendo y multiplicando por s se tiene:

$$L's = \rho\, s'M^{-1}s = \rho b,$$

donde se definió $b \equiv s'M^{-1}s$. Teniendo en cuenta (2) puede despejarse el valor de ρ en un mínimo:

(4) $\quad \rho = (\mu_o - K')/b.$

[20] Se agrega el factor ½ sólo para evitar el arrastre de un factor 2 en las fórmulas.

Reemplazando (4) en (3) se tiene la cartera de préstamos que minimiza la varianza, dado μ_o:

$$L = [(\mu_o - K')/b]/ M^{-1}s.$$

Además, usando (3) y (4), la varianza del capital final en un mínimo es:

$$(5) \qquad \sigma^2 = L\acute{}ML = \rho^2 b = (\mu_o - K')^2/b,$$

por lo cual

$$\sigma = |\mu_o - K'|/\sqrt{b}$$

o sea,

$$\sigma\sqrt{b} = \mu_o - K' \quad \text{si} \quad \mu_o \geq K'$$
$$\sigma\sqrt{b} = K' - \mu_o \quad \text{si} \quad \mu_o < K',$$

o sea,

$$\mu_o = K' + \sqrt{b}\sigma \quad \text{si} \quad \mu_o \geq K'$$
$$\mu_o = K' - \sqrt{b}\sigma \quad \text{si} \quad \mu_o < K'.$$

Esta es la fórmula general para la frontera de varianza mínima cuando hay un activo libre de riesgo. La frontera eficiente es sólo la parte que corresponde a $\mu_o \geq K'$ pues sólo en ese tramo se elige la cartera que maximiza el capital final esperado dado un nivel de riesgo. Ese es el tramo captado en el Gráfico 1 (así como los subsecuentes).

II. Derivación de la frontera de eficiencia cuando no hay activo libre de riesgo

Cuando no hay un activo libre de riesgo el análisis es similar excepto que debe agregarse una restricción adicional que refleje que $R \equiv D+K-L'u = 0$ [21]:

[21] Véase Merton (1972).

$$\underset{L}{\text{Min}}\ (1/2)\ L'ML \quad \text{sujeto a } \mu_o = K' + L's, \quad D+K = L'u$$

donde u es el vector de unos. El Lagrangeano es ahora:

$$(1/2)\ L'ML\ + \rho(\mu_o - K' - L's) + \xi(D+K - L'u)$$

donde ρ y ξ son los multiplicadores de Lagrange. Las condiciones de primer orden son:

(6) $\qquad ML - \rho s - \xi u = 0$

(7) $\qquad \mu_o = K' + L's$

(8) $\qquad D+K = L'u.$

A partir de (6) se despeja

(9) $\qquad L = M^{-1}(\rho s + \xi u).$

Reemplazando en (7) y (8) se tiene:

(10) $\qquad \mu_o - K' = \rho b + \xi a.$

(11) $\qquad D + K = \rho a + \xi c$

donde se definió[22]

$$a \equiv u'M^{-1}s = s'M^{-1}u, \qquad b \equiv s'M^{-1}s, \qquad c \equiv u'M^{-1}u.$$

A partir de (10) y (11) puede despejarse

(12) $\qquad \rho = [c(\mu_o - K') - a(D+K)]/e$

(13) $\qquad \xi = [b(D+K) - a(\mu_o - K')]/e$

donde se definió

[22] Recuérdese que la inversa de una matriz simétrica es también simétrica.

$e \equiv bc - a^2$.

Premultiplicando (6) por L' y teniendo en cuenta (7), (8), (12) y (13) se tiene:

(14) $\sigma^2 = L'ML = \rho L's + \xi L'u = \rho(\mu_o - K') + \xi(D+K)$

$= (1/e)[c(\mu_o - K')^2 - 2a(D+K)(\mu_o - K') + b(d+K)^2]$.

Obsérvese que como M^{-1} es definida positiva[23], se tiene

$0 < (as - bu)'M^{-1}(as - bu) =$

$= a^2 s'M^{-1}s + b^2 u'M^{-1}u - ab\, s'M^{-1}u - ab\, u'M^{-1}s =$

$= a^2b + b^2c - 2a^2b = b(bc - a^2) = be$.

Como b es positivo, entonces e también lo es. Esto demuestra que en el plano μ_o, σ, la fórmula dada por (14) es una parábola como la dibujada en el Gráfico 1.

III. Punto de tangencia entre las dos fronteras eficientes

Igualando los lados derechos de (5) y (14) y teniendo en cuenta la definición de e se deduce que el punto de tangencia entre la recta y la parábola se da en el punto definido por

(15) $\mu_o = K' + (b/a)(D+K)$

(16) $\sigma_o = (\sqrt{b}/a)(D+K)$.

Por consiguiente, la cartera de préstamos que corresponde al punto de tangencia es:

(17) $L_o = [(D+K)/a]\, M^{-1}s$.

[23] La inversa de una matriz definida positiva es también definida positiva. Véase Goldberger (1964).

Obsérvese que esta cartera satisface (7) y (8). El banco sólo elige este punto si (casualmente) su coeficiente de aversión al riesgo es $\theta = a/(D+K)$.

Con la ayuda de (15) y (16) es fácil comprobar lo afirmado en el texto con respecto a lo que sucede en el Gráfico 1 cuando cambia K o D. Si sube D sin que cambie K se desplaza la curva hacia el nordeste sin que se mueva la recta. Hay un monto mayor de recursos que puede usarse. Si la función de utilidad es de la familia CARA (aversión al riesgo absoluta constante)[24], θ es una constante, por lo cual no se modifica la oferta de préstamos $L^* = (1/\theta)M^{-1}s$ (siempre que no cambien las tasas de interés) y los mayores recursos se invierten íntegramente en el mercado interbancario.

Si sube K sin que cambie D+K (o sea, con una baja igual de K) se produce un desplazamiento hacia arriba tanto de la curva como de la recta en la magnitud $\Delta K'$. Nuevamente, con una función de utilidad de la familia CARA no cambia la oferta de préstamos y los mayores recursos se destinan a reservas. A su vez, un aumento en K sin que cambie D puede obtenerse a partir de una combinación de los dos ejercicios anteriores: una suba en K junto con una baja en D y una suba en D compensatoria.

IV. El efecto de la regulación de capital mínimo sobre la frontera eficiente

Cuando el regulador fija un vector de ponderadores de riesgo de hecho está transformando la frontera factible del banco. Esta se determina de la siguiente manera:

$$\min_{L} (1/2)\, L'ML \quad \text{sujeto a } \mu_o = K' + L's, \quad K \geq kL'w$$

El lagrangeano es:

$$(1/2)\, L'ML + \rho(\mu_o - K' - L's) + \xi(K/k - L'w), \qquad \xi \geq 0 .$$

donde ρ y ξ son los multiplicadores de Lagrange y $\xi \geq 0$. Las condiciones de primer orden son:

[24] Una función de utilidad de von Neumann-Morgenstern de la familia CARA (normalizada para que sea u(0)=0) es:

$$u(K_1^{\sim}) = (1/\theta)[1 - \exp(-\theta K_1\sim)].$$

(18) $ML - \rho s - \xi w = 0$

(19) $\mu_o = K' + L's$

(20) $\xi(K/k - L'w) = 0.$

Si el banco está restringido por la regulación, $\xi>0$ y la segunda restricción debe darse con igualdad. Este es el caso que interesa en esta sección. En tal caso, (20) se reduce a

(21) $K/k - L'w = 0$

A partir de (18) se despeja

(22) $L = M^{-1}(\rho s + \xi w).$

Reemplazando en (19) y (21) se obtiene:

(23) $\mu_o - K' = \rho b + \xi a'.$

(24) $D + K/k = \rho a' + \xi c'$

donde se definió

$a' \equiv w'M^{-1}s = s'M^{-1}w,$ $b \equiv s'M^{-1}s,$ $c' \equiv w'M^{-1}w.$

A partir de (23) y (24) puede despejarse

(25) $\rho = [c'(\mu_o - K') – a'K/k)]/e'\xi\geq 0$.

(26) $\xi = [bK/k – a'(\mu_o - K')]/e$

donde se definió

$e' \equiv bc' – (a')^2.$

Introduciendo (25) y (26) en (22) se tiene:

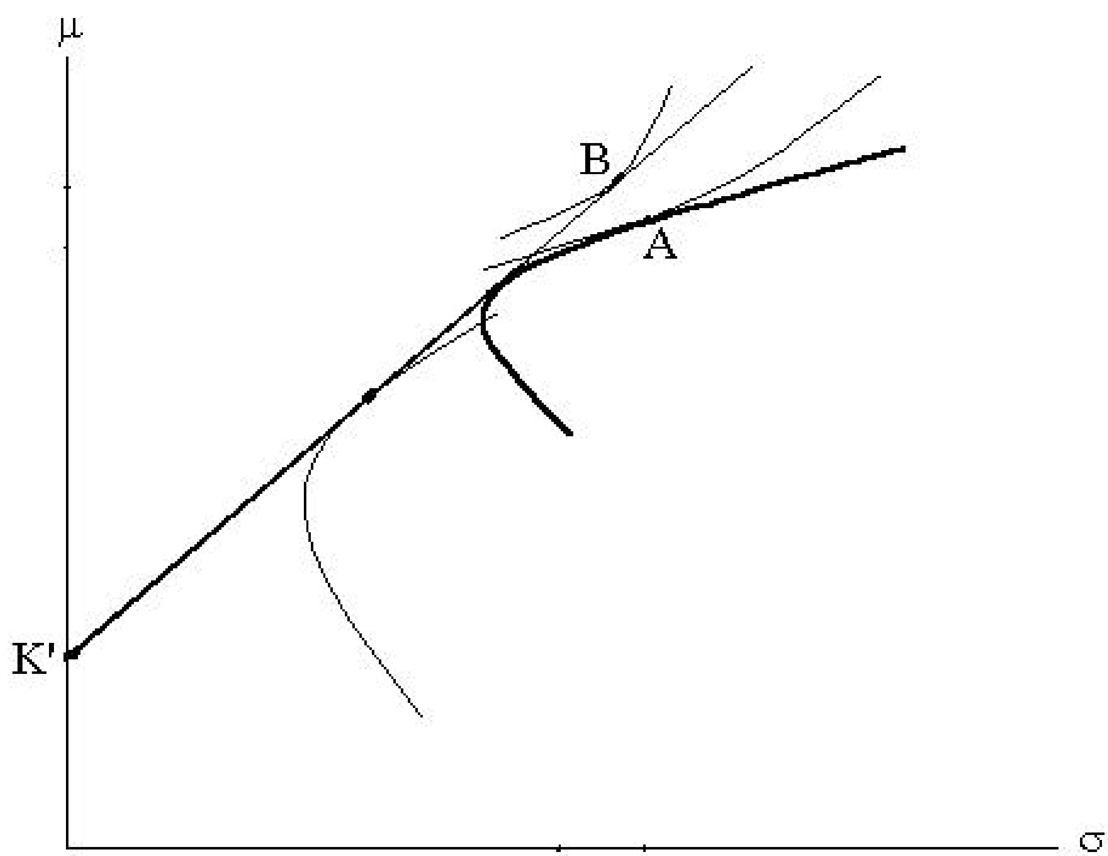
(27) $L = \{[c'(\mu_o - K') - a'K/k]\, M^{-1}s + [bK/k - a'(\mu_o - K')]\, M^{-1} w\}/e'$

Por consiguiente, la varianza de la cartera es:

(28) $\sigma^2 = L'ML = (1/e')[c'(\mu_o - K')^2 - 2a'(K/k)(\mu_o - K') + b(K/k)^2].$

En forma totalmente análoga a las secciones II y III de este Apéndice, esta fórmula representa una parábola en el plano μ, σ que es tangente a la recta de la frontera eficiente con activo libre de riesgo. Pero ahora la frontera factible para el banco cuando existe activo libre de riesgo avanza por la recta hasta el punto de tangencia con esta nueva parábola. A partir de este punto, la frontera factible del banco avanza por la parábola, como se ve en el gráfico a continuación:

Gráfico A



Al banco le gustaría poder elegir el punto B pero debe conformarse con elegir el punto A. Sin embargo, está claro que en ese punto la probabilidad de quiebra es mayor que en el punto B, por lo cual la regulación es un completo fracaso. Por consiguiente, el regulador debe ser cuidadoso al elegir w. Para ello, puede determinar la estructura de w minimizando el riesgo de la cartera (o sea su desvío estándar) y tomando en cuenta el conocimiento de cómo el banco determina su cartera óptima cuando está limitado por la regulación de capital mínimo.

V. Determinación de los ponderadores de riesgo óptimos

En la sección 4 del texto se vio que el banco sujeto al requisito de capital mínimo maximiza

(29) $$U(K' + L's, (L'ML)^{1/2}) \text{ sujeto a } K \geq kL'w$$

para lo cual formaba el lagrangeano:

(30) $$U(K' + L's, (L'ML)^{1/2}) - \nu(kL'w - K)$$

donde $\nu \geq 0$ es el multiplicador de Lagrange. Se obtenía el vector de préstamos óptimo

(31) $$L^{\bullet} = (1/\theta)M^{-1}(s - \nu kw/U_{\mu}).$$

Además, si el banco estaba limitado por la regulación debía cumplirse la igualdad $kL'w = K$ y ν debía ser positivo. Reemplazando (31) en la igualdad puede despejarse:

(32) $$\nu k/U_{\mu} = (a' - \theta K/k)/c'$$

donde a' y c' son las mismas que en la sección anterior. Reemplazando en (31) se tiene

(33) $$L^{\bullet} = (1/\theta)M^{-1}\{s - [(a' - \theta K/k)/c']w\}.$$

Usando este fórmula se obtiene el riesgo de la cartera:

(34) $\sigma^2 = L^{\bullet}{}'ML^{\bullet} = (1/\theta^2)\{b + [(a' - \theta K/k)^{2} - 2a'(a' - \theta K/k)]/c'\}$

Debe recordarse que en esta fórmula a' y c' dependen de w.

Para determinar la estructura (y no el nivel) de w debe restringirse este vector a un cierto hiperplano que defina su nivel (porque de otra manera el problema no estaría bien planteado). Para ello es conveniente definir

(35) $W = \{w \geq 0 \ / \ a' = \gamma b\} = \{ w \geq 0 \ / \ s'M^{-1}w = \gamma b \}.$

Obsérvese que el vector $w = \gamma s$ que se utilizó en el texto pertenece a este conjunto. Utilizando (35) para eliminar a' de (34) e introduciendo la definición de c' se obtiene:

(36) $\sigma^2 = L^{\bullet}{}'ML^{\bullet} = (1/\theta^2)\{b + [(\theta K/k)^{2} - (\gamma b)^2]/(w'M^{-1}w)\}.$

Obsérvese que el término entre corchetes es negativo, pues lo es el lado izquierdo de (32)[25]. Por consiguiente, si el regulador quiere elegir el w que minimice la varianza de la cartera del banco le basta con minimizar $w'M^{-1}w$. Entonces el regulador debe

(37) $\min_{w} (1/2)w'M^{-1}w$ sujeto a $s'M^{-1}w = \gamma b$

El lagrangeano es:

(38) $(1/2)w'M^{-1}w - \lambda(\gamma b - s'M^{-1}w).$

La condición de primer orden es

(39) $w'M^{-1} + \lambda\, s'M^{-1} = 0.$

Posmultiplicando por s se despeja $\lambda = -a'/b$, por lo cual reemplazando en (39) se tiene $w = (a'/b)s = \gamma s$. Para comprobar que se trata de un mínimo puede

[25] En particular, c' es positivo pues w es diferente de cero y la inversa de una matriz definida positiva es también definida positiva.

diferenciarse (39) con respecto a w, lo que da M^{-1}. Como esta matriz es definida positiva se cumple la condición de segundo orden para un mínimo.[26]

[26] Para comprobar que esto está acorde con el texto, puede reemplazarse $w = \gamma s$ en (36) y simplificarse, obteniéndose $\sigma = K/(\gamma k\sqrt{b})$ como en la sección 4.

Bibliografía

1. Jean-Charles Rochet, "Capital requirements and the behaviour of commercial banks", European Economic Review 36 (1992) 1137-1170. North-Holland.
2. Rafael Repullo, "Comments. 'Capital requirements and the behaviour of banks' by Jean-Charles Rochet", European Economic Review 36 (1992) 1174-1177. North-Holland.
3. Daesik Kim y Anthony M Santomero, "Risk in Banking and Capital Regulation", The Journal of Finance, Vol. XLIII, No. 5, December 1988.
4. Michael Koehn y Anthony M. Santomero, "Regulation of Bank Capital and Portfolio Risk", The Journal of Finance, Vol. XXXV, No. 5, December 1980.
5. Roger D. Blair y Argnold A. Heggestad, "Bank Portfolio Regulation and the Probability of Bank Failure", Journal of Money, Credit, and Banking, vol. 10, No. 1 (February 1978).
6. Xavier Freixas y Jean-Charles Rochet, Microeconomics of Banking, The MIT Press, 1997.
7. Gerard Gennotte and David Pyle, "Capital controls and bank risk", Journal of Banking and Finance 15 (1991) 805-824, North-Holland.
8. Robert C. Merton, "An analytic derivation of the efficient portfolio frontier", Journal of Financial and Quantitative Analysis, (1972), 1851-1871.
9. Robert C. Merton, "An intertemporal capital asset pricing model", Econométrica, Vol. 41, No. 5 (September, 1973).
10. Michael C. Keeley, Frederick T. Furlong, "A reexamination of mean-variance analysis of bank capital regulation", Journal of Banking and Finance 14 (1990) 69-84, North-Holland.
11. Frederick T. Furlong y Michael C. Keeley, "Capital regulation and bank risk-taking: a note", Journal of Banking and finance 13 (1989) 883-891, North-Holland.
12. Oliver D. Hart y Dwight M. Jafee (1973), On the Application of Portfolio Theory to Depository Financial Intermediaries, Reveiew of Economic Studies.
13. Arthur Goldberger (1964), Teoría Econométrica, BICE.
14. Basel Committee on Banking Supervision, "A New Capital Adequacy Framework", Basel, June 1999.